

合肥工业大学期中试卷

2021~2022 学年第二学期

数学(下)(034Y01)

- (10分) 求函数 $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域.
- (5分) 求函数 $y = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1 + e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ 的反函数.
- (10分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)^{1/x}$.
- (5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+8}$.
- (5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{-x}-1)}{\arctan(1-\cos x)}$.
- (5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x-x^2} - \sqrt{1-2x+x^2}}{x}$.
- (5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)-2\ln x}}$.
- (5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{e^x-1} - \arctan \frac{x}{2} \right)$.
- (5分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+2} + \frac{2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+2n} \right)$.
- (5分) 设 $a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求之.
- (10分) 证明 $e^x + x = 4$ 在 $(0, +\infty)$ 内有零点.
- (5分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 且 $f(-1) \leq 1 \leq f(1)$. 证明存在 $\xi \in [-1, 1]$, 使得 $f(\xi) = \xi^2$.
- (10分) 求 $y = e^{x+1} \sin x - e^2 \sin 1$ 的导数.
- (5分) 求 $y = \arctan e^x$ 的导数.
- (5分) 求曲线 $y = \tan x$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$ 处的切线方程和法线方程.
- (5分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{\arctan x}, & x < 0, \\ 2x+a, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a .

合肥工业大学 试卷 (A)

2021 ~ 2022 学年第二学期

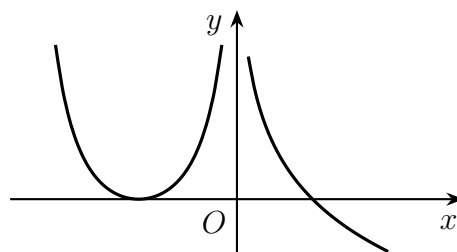
数学 (下) (034Y01)

一、填空题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 如果 $f(x) > 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 + f(x)]^{1/f(x)} =$ _____.
2. 设 $y = \sin(x^2 + 1)$, 则 $dy =$ _____.
3. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 - 1} + \frac{2}{n^2 - 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 - n} \right) =$ _____.
4. 曲线 $y = 2 \ln(x + 1)$ 在点 $(1, 2 \ln 2)$ 处的切线方程为_____.
5. 若 $e^{y-1} = 1 + xy$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.
6. 如果函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 且 $x = 0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} =$ _____.

二、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 和 () 是等价无穷小.
A. $\sin \frac{1}{x}$ B. $\sin x$ C. e^{-x} D. $e^{1/x}$
2. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan(e^x - 1) \cdot (\cos x - 1)$ 和 x^n 是同阶无穷小, 则 $n =$ ().
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. 设 $f(x) = \arctan \frac{1}{x(x-1)^2}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ().
A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 第二类间断点 D. 连续点
4. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且 $f'(x)$ 的图像如下图所示, 则 $f(x)$ 有 ().
A. 一个极大值点, 没有极小值点
B. 没有极大值点, 一个极小值点
C. 一个极大值点和一个极小值点
D. 一个极大值点和两个极小值点
5. 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^{2022}) + x^{2021} f(x)}{x^{2022}} =$ ().
A. 0 B. $f'(0)$ C. $2f'(0)$ D. $2022f'(0)$



6. 如果点 (x_0, y_0) 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0) = (\quad)$.
- A. 0 B. ∞ C. 不存在 D. 0 或不存在

三、解答题 (每题 8 分, 共 64 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\arcsin x^2}$.

3. 设 $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 + t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x^2 + ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$ 求常数 a, b 使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 并求出此时曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

5. 求函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.

6. 证明: 当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $\xi f'(\xi) + 2022f(\xi) = 0$.

8. 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{2}{x^2}, x \in (0, +\infty)$. 求

(1) 函数 $f(x)$ 的增减区间及极值;

(2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间及拐点.

合肥工业大学试卷参考答案 (A)

2021~2022 学年第二学期

数学(下)(034Y01)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. e , 2. $2x \cos(x^2 + 1) dx$, 3. $\frac{1}{2}$,
4. $y = x - 1 + 2 \ln 2$, 5. 1 , 6. 0 .

二、选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	B	A	C	D

三、解答题 (每小题 8 分, 共 64 分)

1. (8 分) 【解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x + 2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \frac{-2}{1} = -2. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

2. (8 分) 【解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\arcsin x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

3. (8 分) 【解】

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{3t^2 + 1}{2t + 1}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{6t(2t + 1) - (3t^2 + 1)2}{(2t + 1)^3} = \frac{6t^2 + 6t - 2}{(2t + 1)^3}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

4. (8分)【解】

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此

$$f(0) = f(0^+) \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= b = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \arctan \frac{1}{x} = 0 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 因此

$$f'_-(0) = f'_+(0), \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$f'_+(0) = (2x + a)|_{x=0} = a, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此 $a = -\frac{\pi}{2}$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

因此曲线 $y = f(x)$ 的渐近线只有 $y = 1$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

5. (8分)【解】

由

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1) = 0 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

可得驻点 $x = -\frac{1}{3}, 1$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

由于

$$f(-2) = -10, \quad f(2) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}, \quad f(1) = -1, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此最大值为 2, 最小值为 -10. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

6. (8分)【证明】

证法一: 设 $f(x) = \tan x - x$, 则 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 从而 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$f(x_2) \geq f(x_1), \quad \tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

证法二: 设 $f(x) = \tan x$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, (x_1, x_2) 内可导. (2 分)

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

即

$$\frac{\tan x_2 - \tan x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\cos^2 \xi} \geq 1. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

所以 $\tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1$ (2 分)

7. (8 分) 【证明】

设 $F(x) = x^{2022} f(x)$, (2 分)

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, (1 分)

且 $F(0) = 0, F(1) = f(1) = 0$ (1 分)

由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$ (2 分)

由于 $F'(x) = x^{2022} f'(x) + 2022x^{2021} f(x)$ 且 $\xi \neq 0$, (1 分)

所以 $\xi f'(\xi) + 2022f(\xi) = 1$ (1 分)

8. (8 分) 【解】

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - 4}{x^3} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^3}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$. 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$ (1 分)

因此 $(0, 2]$ 是 $f(x)$ 的单减区间,

$[2, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的单增区间. (1 分, 写成开区间不扣分)

所以 $f(x)$ 只有唯一的极小值 $f(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$ (1 分)

(2)

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{12}{x^4} = -\frac{x^2 - 12}{x^4} = -\frac{(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{x^4}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

当 $0 < x < 2\sqrt{3}$ 时, $f''(x) > 0$. 当 $x > 2\sqrt{3}$ 时, $f''(x) < 0$ (1 分)

因此 $(0, 2\sqrt{3}]$ 是曲线 $y = f(x)$ 的凹区间,

$[2\sqrt{3}, +\infty)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的凸区间, (1 分, 写成开区间不扣分)

拐点为 $\left(2\sqrt{3}, \ln(2\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\right)$ (1 分)