

4. 曲線（1次元多様体）：3次（オーダ4の）スプライン

我々は曲線を多項式で表現する方法を考える。NURBSも含めて、多項式は最も簡便で扱いやすい関数である。

4.1 3次エルミート補間関数(Cubic Hermite Interpolation Polynomials)

パラメータ区間を [0,1]とするある仮想の関数 $g(t)$ を考える。 $g(t)$ はパラメータ値 0 と 1 の2点の値 $g_0 = g(0)$ 、 $g_1 = g(1)$ が既知であるとして、この $g(t)$ を表現する(補間する) 3次多項式 $f(t)$ を考える。2点 g_0 、 g_1 において、点のデータに加えて1次微分値 s_0 と s_1 が分かっているとする。

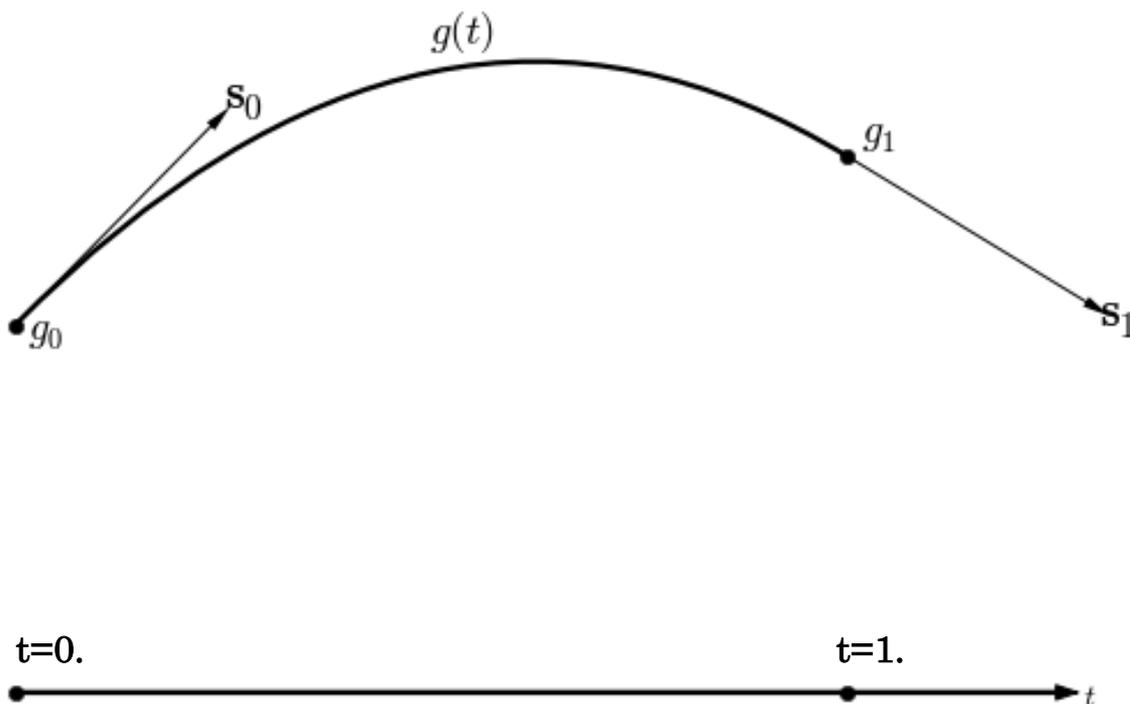


図4. 1 2点 g_0 、 g_1 と1次微分値 s_0 と s_1 を与えて関数 $g(t)$ を近似する

3次多項式 $f(t)$ は一般的に次のように記述できる：

$$f(t) = \sum_{j=0}^3 a_j t^j = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$f'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$ であり、この両式にそれぞれ $t=0, 1$ における値 g_0 、 g_1 、 s_0 、 s_1 を

与えると

$$f(0) = a_0 = g_0, \quad f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = g_1$$

$$f'(0) = a_1 = s_0, \quad f'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = s_1$$

これを解くと、 $a_0 = g_0$ 、 $a_1 = s_0$ 、 $a_2 = -3g_0 + 3g_1 - 2s_0 - s_1$ 、 $a_3 = 2g_0 - 2g_1 + s_0 + s_1$ 、

すなわち、

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\
 &= g_0 + s_0t + (-3g_0 + 3g_1 - 2s_0 - s_1)t^2 + (2g_0 - 2g_1 + s_0 + s_1)t^3 \\
 &= (1 - 3t^2 + 2t^3)g_0 + (3t^2 - 2t^3)g_1 + (t - 2t^2 + t^3)s_0 + (-t^2 + t^3)s_1
 \end{aligned}$$

すなわち、 $f(t)$ は(式4-1)と記述できる。

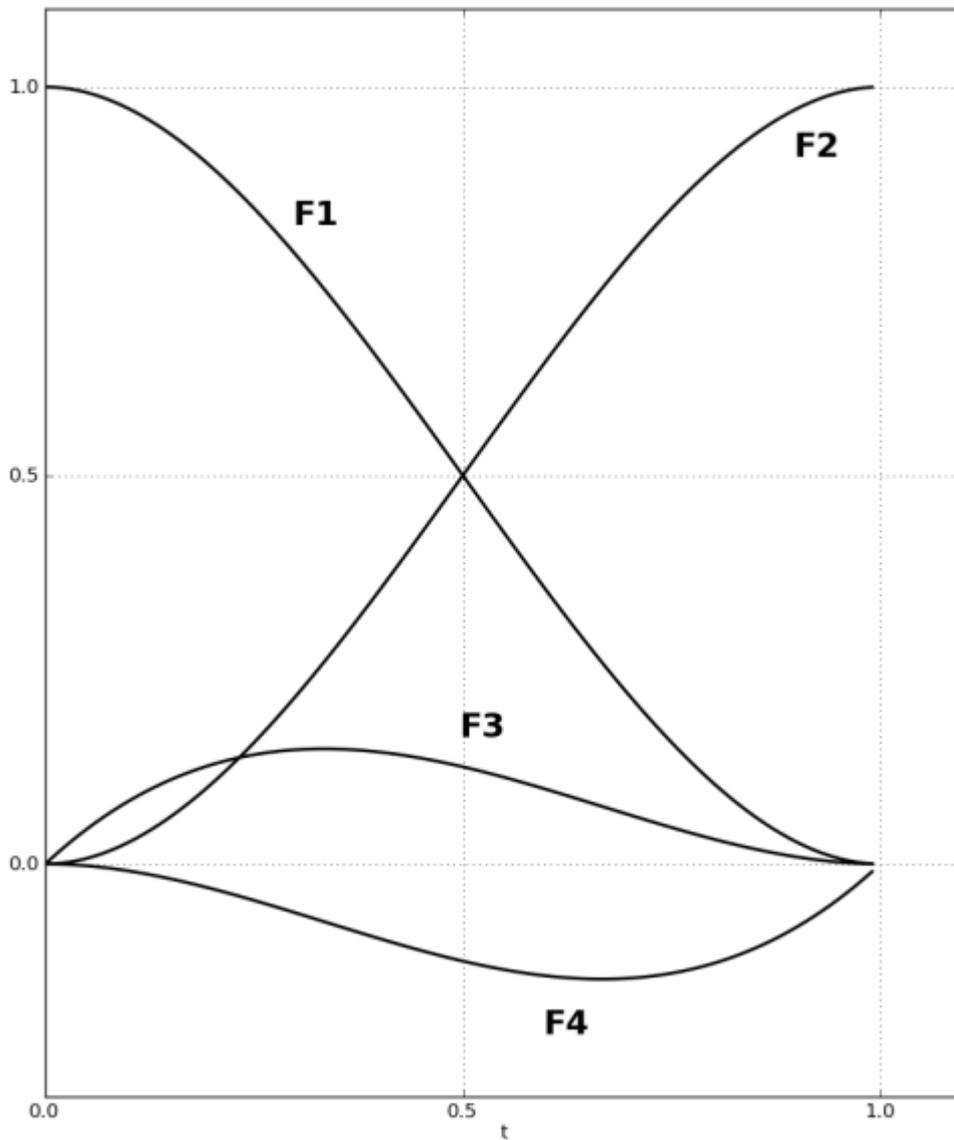


図 4.2 ブレンディング関数

$$(式4-1) \quad f(t) = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad F_3(t) \quad F_4(t)] \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3, \quad F_3(t) = t - 2t^2 + t^3, \quad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

$$F_1(0) = F_2(1) = 1, \quad F_1(1) = F_2(0) = F_3(0) = F_3(1) = F_4(0) = F_4(1) = 0,$$

$$F_3'(0) = F_4'(1) = 1, \quad F_1'(0) = F_1'(1) = F_2'(0) = F_2'(1) = F_3'(1) = F_4'(0) = 0$$

で、F1 は t=0 における位置データを、F2 は t=1 の際の位置データを、F3 は t=0 における一次微分値データを、F4 は t=1 における一次微分データを、それぞれ表現する役割を担っていることが分かる。

4.2 区分的多項式表現(Piecewise Polynomial Representation) : PP 表現

近似しようとする未知の曲線 $g(t)$ があり、その n 個のパラメータ値 $\tau_i \quad i=0, \dots, n-1$ におけるデータ g_i が与えられて、 $(n-1)$ 個のパラメータ区間 $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ を異なる形の $(n-1)$ 個の多項式 $f_i \quad i=0, \dots, n-2$ で表現する。 f_i の集合としてパラメータ区間 $[\tau_0, \tau_{n-1}]$ の関数 $g(t)$ を近似する曲線表現 $f(t)$ を、区分的多項式表現 (Piecewise Polynomial Representation—PP 表現) という。

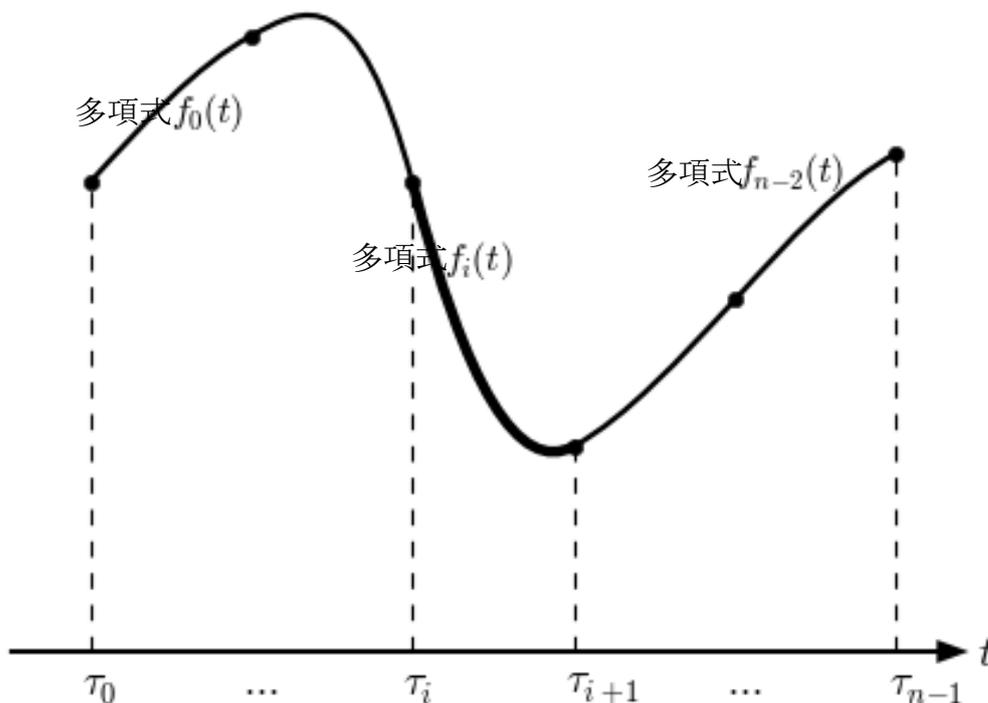


図4.3 PP表現 (Piecewise Polynomial Representation — 区分的多項式表現)

$f(t)$ は (式 4-2) に記述できる。

$$(式4-2) \quad f(t) = f_i(t) \text{ for } \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1} \quad \text{for } i=0, \dots, n-2$$

オーダー k (次数 $k-1$)、 f_i^j を $f_i(t)$ のパラメータ値 τ_i における j 次微分値とすると、 $f_i(t)$ は次式で記述できる。(これは $f_i(t)$ を順次微分して、 $t = \tau_i$ を代入すればわかる) :

$$(式4-3) \quad f_i(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_i^j}{j!} (t - \tau_i) \quad \text{for } i=0, \dots, n-2$$

このうち、オーダー 4 (3 次式) のものが広く利用される。オーダー 4 の PP 表現 $f(t)$ の i 番目の多項式 $f_i(t)$ は次式で表現できる

$$(式4-4) \quad f_i(t) = f_i^0 + f_i^1(t - \tau_i) + \frac{f_i^2}{2}(t - \tau_i)^2 + \frac{f_i^3}{6}(t - \tau_i)^3 \quad \text{for } i=0, \dots, n-2$$

(1) 1 次微分値による 3 次 (オーダー 4 の) PP 表現

τ_i における一次微分値を s_i (slope i) for $i=0, \dots, n-1$ として、 f_i と f_{i+1} とは τ_{i+1} にて、同じ関数値、同じ一次微分値を持つ (すなわち C^1 級の連続性の PP 表現) とすると、次式が成立する。

$$(式4-5) \quad \begin{cases} f_i(\tau_i) = g_i, & f_i(\tau_{i+1}) = g_{i+1} \\ f_i'(\tau_i) = s_i, & f_i'(\tau_{i+1}) = s_{i+1} \end{cases} \quad \text{for } i=0, \dots, n-2$$

(式 4-5) で、 s_i は自由に与えることができ、これから求められる区分的多項式表現 $f(t)$ は、各データポイント $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ において関数 $g(t)$ と一致し、パラメータ値域 $[\tau_0, \tau_{n-1}]$ において C^1 の連続性を持つ。すなわち、 $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ において位置データが一致し、連続な一次微分

値を持つ。しかし、必ずしも C^2 連続 (τ_i における $f_{i-1}(t)$ の 2 次微分値と $f_i(t)$ の 2 次微分値が

一致する) ではない。各内点 τ_i ($i=1, \dots, n-2$) において C^2 連続であるという条件を加えるもの

は一般的な 3 次スプラインである ((3)、(4) 3 次スプライン補間参照)。オーダー 4 の PP 表現における i 番目の区間の多項式 $f_i(t)$ は、2. 差分商に記述されるニュートンの内挿公式により

(式 4-6) と記述できる。

$$(式4-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i(t) = g_i + (t - \tau_i)[\tau_i, \tau_i]g + (t - \tau_i)^2[\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}]g \\ + (t - \tau_i)^2(t - \tau_{i+1})[\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}]g \\ = g_i + (t - \tau_i)[\tau_i, \tau_i]g + (t - \tau_i)^2[\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}]g \\ + (t - \tau_i)^2((t - \tau_i) - \Delta\tau_i)[\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}]g \\ = g_i + (t - \tau_i)[\tau_i, \tau_i]g + (t - \tau_i)^2([\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}]g - \Delta\tau_i[\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}]g) \\ + (t - \tau_i)^3[\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}]g \end{array} \right.$$

$$[\tau_i, \tau_i]g = s_i, \quad [\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}]g = \frac{[\tau_i, \tau_{i+1}]g - [\tau_i, \tau_i]g}{\Delta\tau_i} = \frac{1}{\Delta\tau_i}([\tau_i, \tau_{i+1}]g - s_i),$$

$$\begin{aligned} [\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}]g &= \frac{[\tau_i, \tau_{i+1}, \tau_{i+1}]g - [\tau_i, \tau_i, \tau_{i+1}]g}{\Delta\tau_i} \\ &= \frac{1}{\Delta\tau_i} \left(\frac{[\tau_{i+1}, \tau_{i+1}]g - [\tau_i, \tau_{i+1}]g}{\Delta\tau_i} - \frac{1}{\Delta\tau_i}([\tau_i, \tau_{i+1}]g - s_i) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta\tau_i} \left(\frac{1}{\Delta\tau_i}(s_{i+1} - [\tau_i, \tau_{i+1}]g) - \frac{1}{\Delta\tau_i}([\tau_i, \tau_{i+1}]g - s_i) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta\tau_i^2}(s_i + s_{i+1} - 2[\tau_i, \tau_{i+1}]g) \end{aligned}$$

したがって、 s_i を使用して(式4-4)の f_i^j は次式で表現できる(1次微分値を用いた3次PP表現):

$$(式4-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i^0 = f_i(\tau_i) = g_i \\ f_i^1 = f_i'(\tau_i) = s_i \\ f_i^2 = f_i^{(2)}(\tau_i) = 2 \left(\frac{[\tau_i, \tau_{i+1}]g - s_i}{\Delta\tau_i} - \frac{f_i^3 \Delta\tau_i}{6} \right) = \frac{6[\tau_i, \tau_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}}{\Delta\tau_i} \\ f_i^3 = f_i^{(3)}(\tau_i) = \frac{6s_i + 6s_{i+1} - 12[\tau_i, \tau_{i+1}]g}{(\Delta\tau_i)^2} \end{array} \right.$$

for $i=0, \dots, n-2$

ここで、 $[\tau_i, \tau_{i+1}]g$ は関数 $g(t)$ のパラメータ値 τ_i, τ_{i+1} における2階の差分商で $[\tau_i, \tau_{i+1}]g = \frac{g_i - g_{i+1}}{\tau_i - \tau_{i+1}} = \frac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i}$ 。また、 $\Delta\tau_i$ は前進差分(forward difference)で $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ 。

(2) 2次微分値による表現

次の(3)の3次スプライン補間のように、 $t = \tau_i$ において C^2 級、すなわち、 f_{i-1} と f_i とは τ_i に

て、二次微分値まで同一である、とすると、3次 PP 表現は、2次微分値のみで表現可能となる。
 τ_i における二次微分値を f_i^2 を用いて、 c_i (curvature i)を $c_i = \frac{f_i^2}{2} = \frac{f_i^{(2)}(\tau_i)}{2}$ として定義する。

c_i を用いて、(式 4-4) の f_i^j は次式で表現できる (2次微分値を用いた 3次 PP 表現) :

$$(式4-8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i^0 = f_i(\tau_i) = g_i \\ f_i^1 = f_i'(\tau_i) = \frac{\Delta g_i}{\Delta \tau_i} - \frac{2\Delta \tau_i}{3} c_i - \frac{\Delta \tau_i}{3} c_{i+1} \\ f_i^2 = f_i^{(2)}(\tau_i) = 2c_i \\ f_i^3 = f_i^{(3)}(\tau_i) = \frac{f_i^{(2)}(\tau_{i+1}) - f_i^{(2)}(\tau_i)}{\Delta \tau_i} = \frac{2(c_{i+1} - c_i)}{\Delta \tau_i} \end{array} \right. \quad \text{for } i=0, \dots, n-2$$

これは次のように求めることができる :

$$(式 4-4) \text{ から } f_i^{(2)}(t) = f_i^2 + f_i^3(t - \tau_i) \text{ で、 } f_i^{(2)}(\tau_{i+1}) = f_i^2 + f_i^3(\tau_{i+1} - \tau_i) = f_i^2 + f_i^3 \Delta \tau_i。$$

したがって、 $2c_{i+1} = f_i^2 + f_i^3 \Delta \tau_i = 2c_i + \frac{6s_i + 6s_{i+1} - 12[\tau_i, \tau_{i+1}]g}{\Delta \tau_i}$ 。また、(式 4-7) から、

$$2c_i = \frac{6[\tau_i, \tau_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}}{\Delta \tau_i}$$

であり、このふたつの式から s_i と s_{i+1} を c_i と c_{i+1} で表現して(式 4-7) を書き直すと (式 4-8) となる。

(3) 3次スプライン補間 : 1次微分値による形式

3次スプライン補間では、 f_i は C^2 級の連続性の PP 表現 (すなわち、 f_{i-1} と f_i とは τ_i にて、同じ関数値、同じ一次、二次微分値を持つ) とする。(式 4-7) から τ_i における f_{i-1} と f_i の 2次微分値が等しいとすると :

$$f_{i-1}^{(2)}(\tau_i) = f_i^{(2)}(\tau_i)$$

$$\begin{aligned} f_{i-1}^{(2)}(\tau_i) &= f_{i-1}^2 + f_{i-1}^3 \Delta \tau_{i-1} = \frac{6[\tau_{i-1}, \tau_i]g - 4s_{i-1} - 2s_i}{\Delta \tau_{i-1}} + \frac{6s_{i-1} + 6s_i - 12[\tau_{i-1}, \tau_i]g}{(\Delta \tau_{i-1})^2} \Delta \tau_{i-1} \\ &= \frac{2s_{i-1} + 4s_i - 6[\tau_{i-1}, \tau_i]g}{\Delta \tau_{i-1}} \end{aligned}$$

$$f_i^{(2)}(\tau_i) = \frac{6[\tau_i, \tau_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}}{\Delta \tau_i} \quad \text{従って、}$$

$$\frac{2s_{i-1} + 4s_i - 6[\tau_{i-1}, \tau_i]g}{\Delta\tau_{i-1}} = \frac{6[\tau_i, \tau_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}}{\Delta\tau_i} \quad \text{これを整理すると}$$

$$(式4-9) \quad s_{i-1}\Delta\tau_i + 2(\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i)s_i + \Delta\tau_{i-1}s_{i+1} = 3[\tau_{i-1}, \tau_i]g\Delta\tau_i + 3[\tau_i, \tau_{i+1}]g\Delta\tau_{i-1}$$

for $i=1, \dots, n-2$

始終点における1次微分値 s_0 と s_{n-1} が何らかの方法で求めたとすると、(式 4-9) は $(n-2)$ 個の未知数 s_i for $i=1, \dots, n-2$ に対する連立一次方程式となる。

これを解いて、(式 4-7) と (式 4-4) から、3次スプラインによる補間問題を解くことができる。

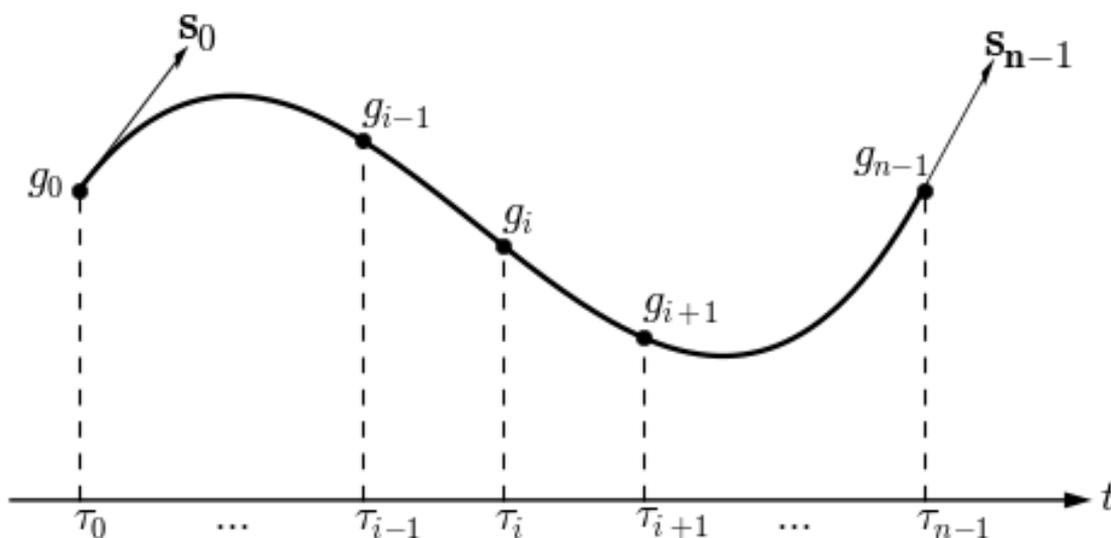


図4. 4 始終点の接ベクトルを与え、3次スプラインを求める

(4) 3次スプライン補間：2次微分値による形式

f_i は C^2 級の連続性の PP 表現 (すなわち、 f_{i-1} と f_i とは τ_i にて、同じ関数値、同じ一次、二次微分値を持つ) として、二次微分値 c_i が既知で、 τ_i における f_{i-1} と f_i の1次微分値が等しいとすると：

$$f'_{i-1}(\tau_i) = f'_i(\tau_i)。 (式4-4) から $f'_{i-1}(\tau_i) = f_{i-1}^1 + f_{i-1}^2\Delta\tau_{i-1} + \frac{f_{i-1}^3}{2}\Delta\tau_{i-1}^2$ 。これに (式4-8)$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
 f'_{i-1}(\tau_i) &= f_{i-1}^1 + f_{i-1}^2 \Delta\tau_{i-1} + \frac{f_{i-1}^3}{2} \Delta\tau_{i-1}^2 \\
 &= \frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}} - \frac{2\Delta\tau_{i-1}}{3} c_{i-1} - \frac{\Delta\tau_{i-1}}{3} c_i + 2c_{i-1} \Delta\tau_{i-1} + \frac{1}{2} * \frac{2(c_i - c_{i-1})}{\Delta\tau_{i-1}} \Delta\tau_{i-1}^2 \\
 &= \frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}} + \frac{1}{3} \Delta\tau_{i-1} c_{i-1} + \frac{2}{3} \Delta\tau_{i-1} c_i
 \end{aligned}$$

$$f'_i(\tau_i) = \frac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i} - \frac{2\Delta\tau_i}{3} c_i - \frac{\Delta\tau_i}{3} c_{i+1} \quad \text{従って、}$$

$$\frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}} + \frac{1}{3} \Delta\tau_{i-1} c_{i-1} + \frac{2}{3} \Delta\tau_{i-1} c_i = \frac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i} - \frac{2\Delta\tau_i}{3} c_i - \frac{\Delta\tau_i}{3} c_{i+1} \quad \text{これを整理すると}$$

$$(式4-10) \quad c_{i-1} \Delta\tau_{i-1} + 2c_i (\Delta\tau_{i-1} + \Delta\tau_i) + c_{i+1} \Delta\tau_i = 3 \left(\frac{\Delta g_i}{\Delta\tau_i} - \frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta\tau_{i-1}} \right) \quad \text{for } i=1, \dots, n-2$$

始終点における2次微分値 c_0 と c_{n-1} が何らかの方法で求めたとすると、(式4-10) は $(n-2)$ 個の未知数 c_i for $i=1, \dots, n-2$ に対する連立一次方程式となる。これを解いて、(式4-8) と (式4-4) から、3次スプラインによる補間問題を解くことができる。

(5) 3次スプライン補間以外の補間法

f_i を C^2 級の連続性の PP 表現とする以外の補間法 (すなわち、 f_{i-1} と f_i とは τ_i にて、同じ関数値、同じ一次微分値であるが、二次微分値は必ずしも連続でないとする) として次のような方法が知られている。:

3次元エルミート補間(Cubic Hermite Interpolation)

τ_i における一次微分値を s_i (slope i) for $i=0, \dots, n-1$ が $s_i = g'(\tau_i)$ として既知であれば、われわれは (式4-7) と (式4-4) (式4-9) から PP 表現を求めることができる。

3次元ベッセル補間(Cubic Bessel Interpolation)

ベッセル補間では、 τ_i における一次微分値 s_i を近傍の3点からオーダ3の多項式 (2次多項式) で近似して求め、(式4-7) (式4-9) から PP 表現を求める。ベッセル補間の s_i は (式4-11) により求めることができる。

$$(式4-11) \quad s_i = \frac{\Delta\tau_i [\tau_{i-1}, \tau_i] g + \Delta\tau_{i-1} [\tau_i, \tau_{i+1}] g}{\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1}}$$

アキマ補間(Akima's Interpolation)

アキマ補間では、(式4-12) により、 τ_i における一次微分値を s_i を求める。

$$S_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{n-3} \\ s_{n-2} \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 3[\tau_0, \tau_1]g\Delta\tau_1 + 3[\tau_1, \tau_2]g\Delta\tau_0 - s_0\Delta\tau_1 \\ 3[\tau_1, \tau_2]g\Delta\tau_2 + 3[\tau_2, \tau_3]g\Delta\tau_1 \\ \vdots \\ 3[\tau_{i-1}, \tau_i]g\Delta\tau_i + 3[\tau_i, \tau_{i+1}]g\Delta\tau_{i-1} \\ \vdots \\ 3[\tau_{n-4}, \tau_{n-3}]g\Delta\tau_{n-3} + 3[\tau_{n-3}, \tau_{n-2}]g\Delta\tau_{n-4} \\ 3[\tau_{n-3}, \tau_{n-2}]g\Delta\tau_{n-2} + 3[\tau_{n-2}, \tau_{n-1}]g\Delta\tau_{n-3} - \Delta\tau_{n-3}s_{n-1} \end{bmatrix}$$

また、2次微分値 c_i の表現 (式 4-10) を利用するには、(式 4-8) で $i=0$ として、
 $f_0^1 = s_0 = \frac{\Delta g_0}{\Delta \tau_0} - \frac{2\Delta \tau_0}{3}c_0 - \frac{\Delta \tau_0}{3}c_1$ 、(式 4-4) を1回微分後 $i=n-2$, $t=\tau_{n-1}$ として (式 4-8)
 から

$$f_{n-2}'(\tau_{n-1}) = s_{n-1} = \frac{\Delta g_{n-2}}{\Delta \tau_{n-2}} + \frac{1}{3}\Delta \tau_{n-2}c_{n-2} + \frac{2}{3}\Delta \tau_{n-2}c_{n-1} \text{ で、(式 4-15) が成り立つ。}$$

$$(式4-15) \quad \begin{cases} 2\Delta \tau_0 c_0 + \Delta \tau_0 c_1 = 3\frac{\Delta g_0}{\Delta \tau_0} - 3s_0 \\ c_{i-1}\Delta \tau_{i-1} + 2c_i(\Delta \tau_{i-1} + \Delta \tau_i) + c_{i+1}\Delta \tau_i = 3\left(\frac{\Delta g_i}{\Delta \tau_i} - \frac{\Delta g_{i-1}}{\Delta \tau_{i-1}}\right) \text{ for } i=1, \dots, n-2 \\ \Delta \tau_{n-2}c_{n-2} + 2\Delta \tau_{n-2}c_{n-1} = 3s_{n-1} - 3\frac{\Delta g_{n-2}}{\Delta \tau_{n-2}} \end{cases}$$

これを行列の形で記述すると

$$(式4-16) \quad R_2 C = H_2$$

となる。ここで、 R_2 は帯幅 3 で $n \times n$ の対称対角行列 (symmetric tridiagonal matrix)、 C, H_2 は $n \times 1$ の行列で、次式で定義される。 C は、 $C = R_2^{-1}H_2$ により求めることができる。

4.4 クラス MGPPRep

クラス MGPPRep(PP-Representation)は (式 4-3) の PP 表現を C++ のクラス化したもの。
 オーダ k (次数 $k-1$) のクラス MGPPRep は n 個のブレイクポイント $\{\tau_i\}_{i=0}^{n-1}$ を持ち、パラメータ値域は $\tau_0 \leq t \leq \tau_{n-1}$ で、PP 表現の多項式 $f_i(t)$ は $i=0, \dots, n-2$ の $(n-1)$ 個の区間で定義される。
 メンバデータ `m_coef` は $(n-1)$ 個の区間の関数 $f_i(t)$ のパラメータ τ_i における j 次微分値 f_i^j を空間次元 `m_sdim` 分格納している。

プログラムリスト1 Program code MGPPRep のメンバーデータ

```
class MGCLASS MGPPRep {
.....
////////// Member data //////////
private:
    size_t m_order;      // Order of PP-Rep.
    size_t m_nbreak;    // number of Break points(Interval number=m_nbreak-1).
                        // m_nbreak==m_break_point.length()
    size_t m_sdim;      // Space Dimension.
    MGNDArray m_break_point; // Break point sequence.
    double* m_coef;     // PP coef.
.....
}
```

後の B スプラインの項で記述されるが、すべての多項式表現は B-Spline 関数の形に変換できる (B 表現)。B-Spline または、NURBS のほうが MGPPRep で利用される明示的な多項式表現より、表現能力は高い。表現を保持するためのメモリ効率に関しても NURBS のほうが効率が良く、MGPPRep は PP 表現の手法としては一般に利用しない。歴史的には、表現を求めるためにいろいろの手法が開発されており (たとえば、Shoenberg&Reinsch の平滑化関数など) PP 表現を明示的な多項式表現として求めることもあるが、それは一時的な表現であり、保持する形式としては、すべて B-Spline の形に変換して保持される。Shoenberg&Reinsch の平滑化関数関数でも、B-Spline の形に変換して求められる。